I- الاشتقاق في نقطة -الدالة المشتقة

A) أنشطـــــــة

نشاط1

باستعمال التعريف ادرس اشتقاق الدالة f في x_0 و حدد العدد المشتق في x_0 إن وجد ثم حدد معادلة المماس أو نصف المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الأفصول x_0 في الحالات التالية

أ- $f(x)=x^2-2x \quad x_0=1$ ب- $f(x)=x^2-4 \quad x_0=2$

ج- $\begin{cases} f(x)=\sin x & x\le 0 \\ f(x)=x^3-2x & x\succ 0 \end{cases} \quad x_0=0$

نشاط2

حدد الدالة المشتقة f′ للدالة f بعد تحديد مجموعة تعريف كل من f و f′ في الحالات التالية

أ- $f(x)=-2x^4+3x^2-1$ ب - $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

ج - $f(x)=\sin 2x\cos x$ د - $f(x)=1+\tan^2 x$

نشاط3

حـدد $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+\cos \pi x}{x-1}$

B) تذكـــير

1- الاشتقاق في نقطة

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه x_0

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 اذا كانت للدالة $x\to\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l في x_0 ونرمز لها بـ $f'(x_0)$. العدد l يسمى العدد المشتق لـ f في x_0. نكتب $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ب- خاصية

كل دالة قابلة للاشتقاق في x_0 تكون متصلة في x_0

2 – الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

أ- تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0;x_0+\alpha[$ حيث $\alpha\succ 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت للدالة $x\to\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l على اليمين في x_0 و نرمز لها بـ $f'_d(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق لـ f على اليمين في x_0 نكتب $f'_d(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $]x_x-\alpha;x_0]$ حيث $\alpha\succ 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت للدالة $x\to\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l على اليسار في x_0 نرمز لها ب $f'_g(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق لـ f على اليسار في x_0 نكتب $f'_g(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ب – خاصية

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0 والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

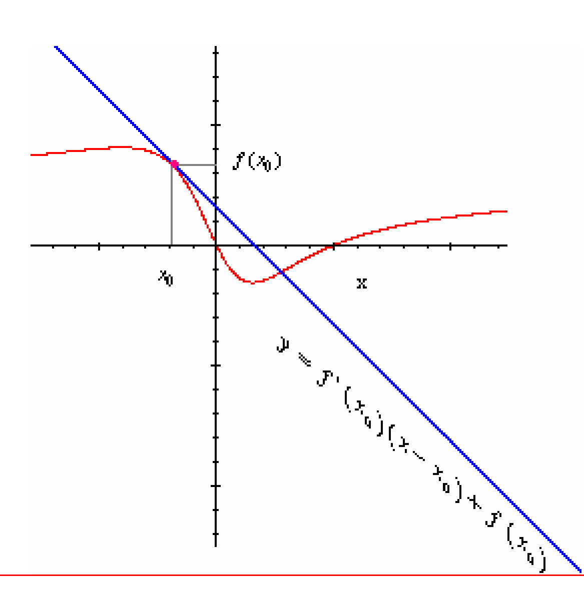
3- التأويل الهندسي – معادلة المماس لمنحنى دالة

أ- المماس

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و C_f منحناها

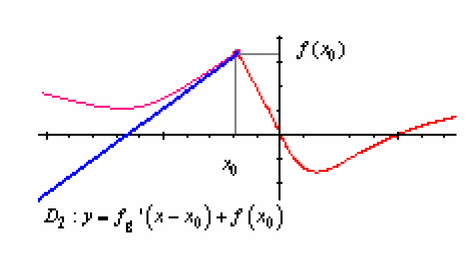
قابلية اشتقاق f في x_0 تؤول هندسيا بوجود مماس لـ C_f عند النقطة ذات الأفصول x_0 معادلته

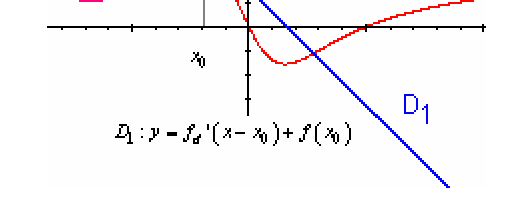
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



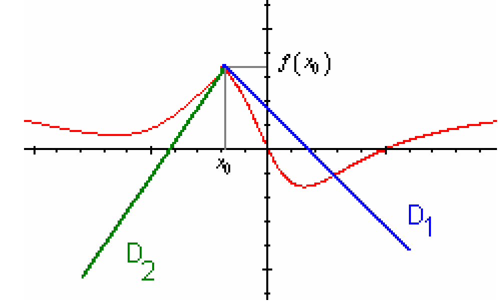
ب- نصف المماس

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 (أو على اليسار في x_0) فان C_f يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الافصول x_0 معامله الموجه $f'_d(x_0)$ (أو $f'_g(x_0)$)





$D_2 : y = f_g'(x - x_0) + f(x_0) \quad x \prec x_0$ $\qquad$ $D_1 : y = f_d'(x - x_0) + f(x_0) \quad x \geq x_0$

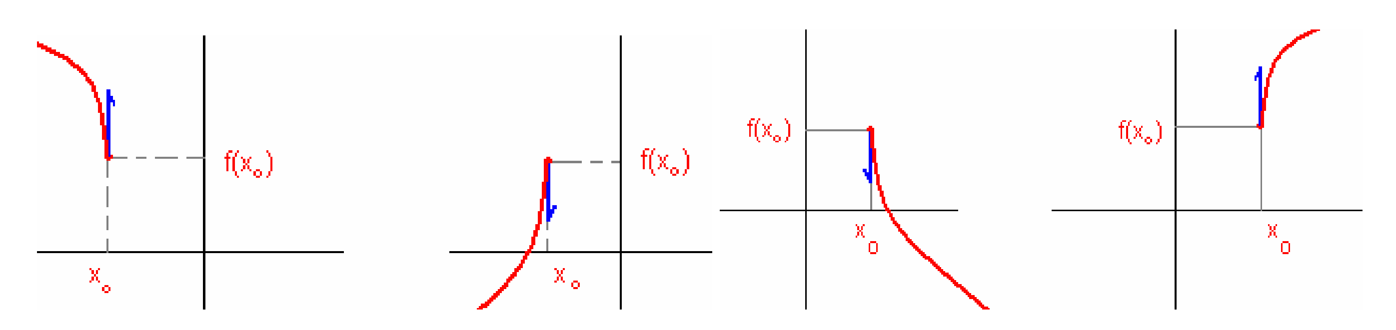


$D_1 : y = f_d'(x - x_0) + f(x_0) \quad x \geq x_0$

$D_2 : y = f_g'(x - x_0) + f(x_0) \quad x \prec x_0$

ج- نصف مماس مواز لمحور الاراتيب

إذا كانت f متصلة في x_0 و كان $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$ أو $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$ فان لـ C_f نصف مماس مواز لمحور الأراتيب.



4- الدالـــة المشتقة

أ- تعريف

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .
الدالة التي تربط كل عنصر x من I بالعدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة نرمز لها بـ f' .

ب- عمليات على الدوال المشتقة

-* لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\forall x\in I\quad (f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$

$$(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$(\lambda f)'=\lambda f'(x)$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$ $\forall x\in I$ بحيث g لا تنعدم على I

-* لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

$$\forall x\in I\qquad \left(f^n\right)'(x)=n\left(f(x)\right)^{n-1}\times f'(x)$$

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n\in\mathbb{Z}_-^*$ و f لا تنعدم على I

$$\forall x\in I\qquad \left(f^n\right)'(x)=n\left(f(x)\right)^{n-1}\times f'(x)$$

II- مشتقة دالة مركبة – مشتقة الدالة العكسية

1- مشتقة دالة مركبة

خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$
إذا كان x_0 عنصرا من I و كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ فان $g\circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0.

خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$

$$\forall x\in I\qquad (g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$$

تمرين أحسب $f'(x)$ بعد تحديد مجموعة تعريف الدالة المشتقة f' في الحالتين التاليتين

$$f(x)=\cos\left(x^3-4x^2\right)\quad (a\quad ;\quad f(x)=\sqrt{x^2-x}\quad (b$$

2- مشتقة الدالة العكسية

خاصية

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I

إذا كان x_0 عنصرا من I و كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و$f'(x_0)\neq 0$ فان الدالة f^{-1} للاشتقاق في $f(x_0)$ و $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

خاصية

لتكن f دالة رتيبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I و f' لا تنعدم على I

$$\forall x\in f(I)\qquad \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

3- تطبيقات

أ مشتقة دالة الجدر من الرتبة n

خاصية

* ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. الدالة $x\to\sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و لدينا $\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\left((x)^{\frac{1}{n}}\right)'=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

* ليكن r من $\mathbb{Q}^*$. الدالة $x\to x^r$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و لدينا $\left(x^r\right)'=rx^{r-1}$

خاصية

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f موجبة قطعا على I و $n\in\mathbb{N}^*$ فان الدالة $x\to\sqrt[n]{f(x)}$ قابلة للاشتقاق على I.

$$\forall x\in I\quad \left(\sqrt[n]{f(x)}\right)'=\left(\left(f(x)\right)^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot f'(x)$$

نتيجة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f موجبة قطعا على I و $r\in\mathbb{Q}$.

$$\forall x\in I\quad \left(\left(f(x)\right)^r\right)'=r\left(f(x)\right)^{r-1}\cdot f'(x)$$

تمرين أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f بعد تحديد D_f و $D_{f'}$ في كل حالة من الحالات التالية

1- $f(x)=\sqrt[3]{(x-3)^2}$ 2- $f(x)=\sqrt[3]{x-3}^{\,2}$ 3- $f(x)=\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{5}}$

4- $f(x)=\left(\left(x^2-1\right)^2\right)^{\frac{1}{5}}$ 5- $f(x)=-2x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{3}{2}}$

جدول مشتقات بعض الدوال

$D_{f'}$	$f'(x)$	$f(x)$
$\mathbb{R}$	0	a
$\mathbb{R}$	1	x
$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad x^n$
$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}^{*-} \quad x^n$
$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\{x \in D_{u'} / u(x) \succ 0\}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\sqrt{u(x)}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$	$n \in \mathbb{N}^* \quad x^{\frac{1}{n}}$
$\mathbb{R}_+^*$	rx^{r-1}	$r \in \mathbb{Q} \quad x^r$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\mathbb{R}$	$-a\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$\mathbb{R}$	$a\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$

III- الدوال الأصلية

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I. نقول إن دالة F هي دالة أصلية للدالة f على I اذا كانت F قابلة للاشتقاق على I وكان $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

أمثلة الدالة $F:x\to x^2+2x$ دالة أصلية للدالة $f:x\to\frac{1}{2}x+2$ على $\mathbb{R}$

الدالة $F:x\to\cos x+3$ دالة أصلية للدالة $f:x\to-\sin x$ على $\mathbb{R}$

خاصية

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية F على مجال I
مجموعة الدوال الأصلية لـلدالة f على I هي المجموعة المكونة من الدوال $F+\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$.

أمثلة - الدالة $F:x\to x^2+2x$ دالة أصلية للدالة $f:x\to\frac{1}{2}x+2$ على $\mathbb{R}$

إذن الدوال الأصلية لـ f هي الدوال F_λ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F_\lambda(x)=x^2+2x+\lambda$

خاصية

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على مجال I ليكن x_0 من I و y_0 من $\mathbb{R}$
توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على مجال I بحيث $G(x_0)=y_0$.

مثال نحدد دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ حيث $f(x)=x^3-2x+3$ التي تأخذ القيمة 2 عند 1

خاصية

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على مجال I على التوالي وكان $\lambda\in\mathbb{R}$ فان
* $F+G$ دالة أصلية لـ $f+g$
* λF دالة أصلية لـ λf

خاصية

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على I

مثال

$$\begin{cases} f(x)=x-3 & x\geq 2\\ f(x)=x^2-5 & x\prec 2\end{cases}$$

بين أن f تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$ و حدد الدوال الأصلية لـ f.

تمـــارين

-1 $f(x)=x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}$ حدد دالة أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$

(لاحظ أن $f(x)=\alpha u'(x)\left(u(x)\right)^n$ حيث α و n معلومين)

-2 $f(x)=\dfrac{3}{4x^2+4x+2}$ حدد دوال أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

(باستعمال الشكل القانوني نحصل على $f(x)=\alpha\dfrac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^2+1}$)

-3 $f(x)=\cos^3 x$ حدد دوال أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

(يتم اخطاط $f(x)$ بوضع $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$)

جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال الاعتيادية

الدالة f	الدوال الأصلية F	مجموعة التعريف I للدالة f و الدوال F
0	λ	$I=\mathbb{R}$
a	$ax+\lambda$	$I=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{N}^*$ x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\lambda$	$I=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{Z}^*-\{-1\}$ x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\lambda$	$I=\mathbb{R}_-^*$ ou $I=\mathbb{R}_+^*$
$n\in\mathbb{Z}^*-\{-1\}$ x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\lambda$	$I=\mathbb{R}_-^*$ ou $I=\mathbb{R}_+^*$
$r\in\mathbb{Q}^*-\{-1\}$ x^r	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+\lambda$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos(ax+b)$ $a\neq 0$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+\lambda$	$I=\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$ $a\neq 0$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+\lambda$	$I=\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x$	$\tan x+\lambda$	$I=\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[/ k\in\mathbb{Z}$
$r\in\mathbb{Q}^*-\{-1\}$ $f^r\cdot f'$	$\frac{1}{r+1}f^{r+1}+\lambda$	I هو المجال التي نكون فيه f^r و f قابلة للاشتقاق
$f+g$	$f+g+\lambda$	I هو المجال التي نكون فيه g و f قابلتان للاشتقاق
$f'g+fg'$	$fg+\lambda$	I هو المجال التي نكون فيه g و f قابلتان للاشتقاق
$\frac{f'g-fg'}{g^2}$	$\frac{f}{g}+\lambda$	I هو المجال التي نكون فيه g و f قابلتان للاشتقاق و لا تنعدم فيه g